

CINEMÁTICA

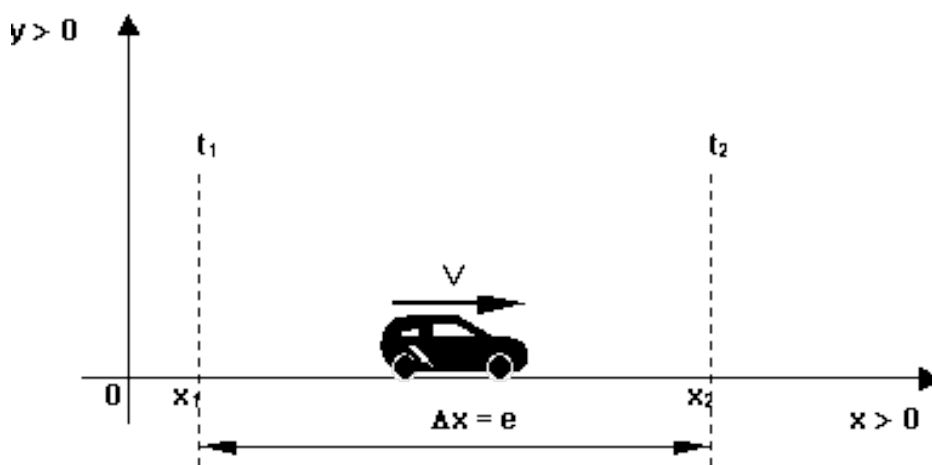
La cinemática se ocupa de la descripción del movimiento sin tener en cuenta sus causas. La velocidad o rapidez (la tasa de variación de la posición) se define como la razón entre el espacio recorrido (distancia desde la posición x_1 hasta la posición x_2) y el tiempo transcurrido.

$$v = d/t \quad (1)$$

siendo:

d: el espacio recorrido o desplazamiento.

t: el tiempo transcurrido.



Representación gráfica de un movimiento rectilíneo y uniforme

La ecuación (1) corresponde a un movimiento rectilíneo y uniforme, donde la velocidad permanece constante en toda la trayectoria.

Vector de posición (r)

Para describir el movimiento de una partícula, respecto de un sistema de referencia, tenemos que conocer, en cada instante, la posición del móvil, su velocidad y la aceleración con la que está animado.

Elegido un sistema de referencia, la posición del móvil queda determinada por el vector de posición:

Vector de posición

$$r(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j + z(t) \cdot k \quad (1)$$

El extremo del vector de posición describe, a lo largo del tiempo, una línea que recibe el nombre de trayectoria. Esta curva se puede obtener eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas.

Se denomina vector desplazamiento Δr entre los instantes t_0 y t_1 a:

Vector desplazamiento

$$\Delta r = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k} \quad (2)$$

Velocidad (v)

Se denomina vector velocidad media (v_m) al desplazamiento que experimenta un móvil en la unidad de tiempo:

Vector velocidad media

$$\begin{aligned} \vec{v}_m &= \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \\ &= v_{mx} \vec{i} + v_{my} \vec{j} + v_{mz} \vec{k} \quad (3) \end{aligned}$$

Y se llama Celeridad o velocidad o rapidez media a la longitud de trayectoria recorrida en la unidad de tiempo.

$$\text{celeridad media} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}}$$

Si la trayectoria es una línea recta y no hay cambios de sentido, el módulo del vector velocidad media coincide con la rapidez.

Velocidad instantánea (v) es la velocidad que posee una partícula en un instante determinado. Es un vector tangente a la trayectoria y de sentido el del movimiento.

Vector velocidad instantánea

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (4) \end{aligned}$$

El valor numérico de la velocidad instantánea es el módulo de la velocidad y se denomina rapidez o celeridad:

$$v = \left| \vec{v} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Aceleración (a)

Se denomina vector aceleración media, a_m , a la variación que experimenta la velocidad instantánea en la unidad de tiempo.

Vector aceleración media

$$\begin{aligned} \vec{a}_m &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \vec{k} \\ &= a_{mx} \vec{i} + a_{my} \vec{j} + a_{mz} \vec{k} \quad (5) \end{aligned}$$

Aceleración instantánea a es la aceleración que posee la partícula en un instante determinado (en cualquier punto de su trayectoria). Su dirección y sentido coincide con el del cambio de la velocidad.

Vector aceleración instantánea

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \right) \\ &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \\ &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (6) \end{aligned}$$

El valor numérico de la aceleración instantánea es el módulo del vector aceleración:

$$a = \left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

Si elegimos como sistema de referencia uno con origen la posición de la partícula, en cada instante, con un eje tangente a la trayectoria y el otro perpendicular a la misma, la aceleración tiene dos componentes:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Aceleración tangencial: es un vector tangente a la trayectoria y su módulo representa la variación del módulo de la velocidad en un instante.

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = dv/dt$$

Aceleración normal: es un vector perpendicular a la trayectoria y sentido hacia el centro de curvatura. Su módulo representa la variación de la dirección del vector velocidad en un instante.

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = v^2/R$$

donde R es el radio de curvatura de la trayectoria.

Por tanto, podemos escribir:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{U}_t + \frac{v^2}{R} \vec{U}_n$$

donde U_t y U_n son dos vectores unitarios en la dirección tangente y normal a la trayectoria.

Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

Existen varios tipos especiales de movimiento fáciles de describir. En primer lugar, aquél en el que la velocidad es constante. En el caso más sencillo, la velocidad podría ser nula, y la posición no cambiaría en el intervalo de tiempo considerado. Si la velocidad es constante, la velocidad media (o promedio) es igual a la velocidad en cualquier instante determinado. Si el tiempo t se mide con un reloj que se pone en marcha con $t = 0$, la distancia e recorrida a velocidad constante V será igual al producto de la velocidad por el tiempo. En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es constante y la aceleración es nula.

$$v = e/t$$

$$v = \text{constante}$$

$$a = 0$$

Movimiento uniformemente variado (M.U.V.)

Otro tipo especial de movimiento es aquél en el que se mantiene constante la aceleración. Como la velocidad varía, hay que definir la velocidad instantánea, que es la velocidad en un instante determinado. En el caso de una aceleración a constante, considerando una velocidad inicial nula ($v = 0$ en $t = 0$), la velocidad instantánea transcurrido el tiempo t será:

$$v = a \cdot t$$

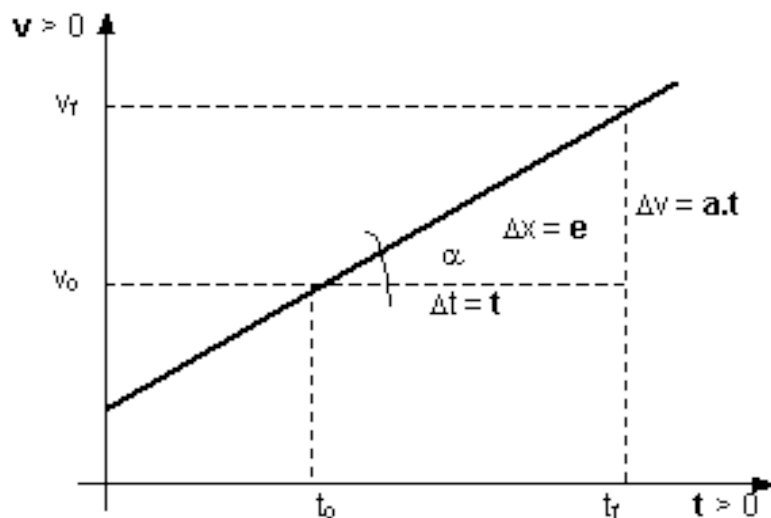
La distancia recorrida durante ese tiempo será

$$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Esta ecuación muestra una característica importante: La distancia depende del cuadrado del tiempo (t^2). En el movimiento uniformemente variado la velocidad varía y la aceleración es distinta de cero y constante.

$$a \neq 0 = \text{constante}$$

$$v = \text{variable}$$



Gráfica de velocidad en función del tiempo

1) Acelerado: $a > 0$

$$d_f = d_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ (Ecuación de posición)}$$

$$v_f = v_0 + a \cdot t \text{ (Ecuación de velocidad)}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta d$$

2) Retardado: $a < 0$

$$d_f = d_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ (Ecuación de posición)}$$

$$v_f = v_0 - a \cdot t \text{ (Ecuación de velocidad)}$$

$$v_f^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot \Delta d$$

Nota: en los diagramas $e = d$; esto quiere decir distancia o espacio recorrido